Accademia Nazionale di Scienze Lettere e Arti
MODENA

Atti e Memorie

Serie VII - Volume VIII - 1990 - 91

Estratto da *Atti e Memorie della Accademia Nazionale di Scienze Lettere e Arti di Modena* - Serie VII, Vol. VIII - 1990-91. Mucchi, Modena, 1993.

Carlo Felice Manara

SIMPLESSI E SIMMETRIE IN UNO SPAZIO QUALUNQUE

Alla memoria di Antonio Pignedoli, amico carissimo.
«Amicus fidelis medicamentum vitae
et immortalitatis (Eccli. VI-16)».

RIASSUNTO

Si mettono in evidenza alcune simmetrie relative a simplessi degli spazi a curvatura costante, aventi un numero qualunque di dimensioni.

Le proprietà presentate generalizzano le nozioni classiche relative a simplessi di uno spazio euclideo a due o tre dimensioni.

SUMMARY

Certain symmetries for simplices embedded in any-dimensional spaces of constant curvature are pointed out. Such properties generalize the classical notions concerning simplices of an euclidean space of two or three dimensions.

1 - I termini «regolare», «regolarità» oppure «simmetrico», «simmetria» o altri ad essi collegati sono utilizzati molto frequentemente nel linguaggio comune, e spesso in contesti e con significati non molto vicini tra loro. Quindi i concetti che tali termini vorrebbero designare sono spesso confusi e sfumati, anche se a prima vista possono apparire chiari ed inequivocabili,

In particolare i concetti stessi sono impiegati anche con significati che fanno riferimento all'arte ed all'estetica; il che non contribuisce certo alla loro chiarezza ed alla univocità dei termini che li vorrebbero rappresentare. Tuttavia tali termini sono anche impiegati in matematica ed in particolare in geometria, con significati precisati e determinati di volta in volta, come gli argomenti richiedono. Scopo della presente nota è mettere in luce alcune proprietà di simplessi appartenenti a spazi di dimensione qualunque, proprietà che possono essere ritenute notevoli dal punto di vista della simmetria, ovviamente secondo un preciso significato che qui intendiamo dare a questo termine. Nel caso di spazi euclidei a 2 ed a 3 dimensioni i risultati che richiameremo sono ben noti, e possono essere enunciati affermando l'esistenza di certi punti, che sono definiti in modo simmetrico rispetto ai vertici di un simplesso; tali punti sono stati presi in considerazione da tempo e vengono chiamati abitualmente «punti notevoli» del simplesso considerato. La loro considerazione appartiene alla trattatistica abituale della geometria elementare (Cfr. [1], [5]); pertanto, da questo punto di vista, il presente lavoro può essere considerato come una ovvia generalizzazione di proprietà ben note.

Riteniamo tuttavia di qualche interesse mettere in evidenza il fatto che certi elementi geometrici possono essere definiti con procedimenti simmetrici rispetto ai vertici di un simplesso qualunque, in uno spazio ad un numero qualesivoglia di dimensioni; e che il concetto di simmetria geometrica possa essere collegato con gruppi di trasformazioni in sé di uno spazio cosiffatto. In questo ordine di idee questo lavoro si richiama ad idee che abbiamo già esposto altrove (Cfr. [3], [4]). Può anche essere interessante osservare che i concetti e le procedure che qui esponiamo per uno spazio euclideo possano essere applicate con pochi ritocchi ad uno spazio a curvatura costante, positiva o negativa.

2 - Siano

$$(1) \qquad x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$$

elementi di un insieme $\mathcal{T}$ e sia f una funzione, definita sulle n-ple di $\mathcal{T}$ ed a valori in un secondo insieme $\mathcal{Y}$. Diremo, secondo l'abitudine, che la funzione f, definita su $\mathcal{T}$ ed a valori in $\mathcal{Y}$, è «simmetrica» se ogni suo valore è indipendente dall'ordine in cui gli elementi (1) di $\mathcal{T}$ sono presi in considerazione. In particolare, se l'elemento di $\mathcal{Y}$ che corrisponde alla n-pla (1) è risultato di certe operazioni, o calcoli, diremo che la funzione è simmetrica se il risultato finale delle operazioni non dipende dall'ordine in cui le operazioni stesse sono eseguite sugli elementi della n-pla.

3 - Sia E uno spazio euclideo ad n dimensioni (con $n > 1$); la metrica che permette di definire su E distanze ed angoli è ben nota.
Considerato un punto $x \in E$, indicheremo con

$$(1) \qquad x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$$

i numeri reali che ne sono le coordinate cartesiane ortogonali. Nel seguito, senza che ci sia bisogno di ulteriori avvisi, i numeri che prenderemo in considerazione saranno in ogni caso reali.

Si considerino n+1 punti di E, che indicheremo con i simboli:

$$(2) \qquad a^\alpha \quad (1 \leq \alpha \leq n+1).$$

Corrispondentemente indicheremo con

$$(3) \qquad a_i^\alpha \quad (1 \leq \alpha \leq n+1;\ 1 \leq i \leq n)$$

le loro coordinate cartesiane.

È noto che il punto h, le cui coordinate h_i sono date dalle

$$(4) \qquad h_i = \left(\sum_{\alpha=1}^{n+1} a_i^\alpha\right) / (n+1)$$

viene chiamato «baricentro» degli n+1 punti (2).

Nel seguito supporremo sempre di aver portato, con una traslazione operata in E, l'origine delle coordinate nel punto h. Di conseguenza potremo sempre supporre che siano valide le relazioni:

$$(5) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n+1} a_i^\alpha = 0 \qquad (1 \leq i \leq n).$$

Sarà facile constatare nel seguito che questa scelta non inficia la validità degli sviluppi che seguiranno, mentre renderà notevolmente più semplici i calcoli.

4 - Converremo di adottare nel seguito le notazioni del calcolo vettoriale e matriciale; in particolare indicheremo i vettori di E con lettere minuscole, prive di indici in basso; ed indicheremo con lettere maiuscole le matrici; di una matrice A che ha m righe ed n colonne diremo che è «di tipo (m,n)» o anche, semplicemente, che è «una matrice (m,n)».

Data che sia una matrice (m,n) A, indicheremo con il simbolo:

(1) $$A_\tau$$

la matrice (n,m) trasposta della A, che si ottiene da questa scambiando le righe con le colonne. Si verifica facilmente che il «τ» apposto in basso a destra può essere considerato come il simbolo di una operazione, che ha le seguenti proprietà formali:

1)

(2) $$(A_\tau)_\tau = A \, ;$$

2) date due matrici A e B, se ha senso la somma A+B, allora si ha:

(3) $$(A+B)_\tau = A_\tau + B_\tau \, ;$$

3) e se ha senso il prodotto AB (eseguito con le abituali regole del prodotto matriciale), allora si ha:

(4) $$(AB)_\tau = B_\tau A_\tau \, .$$

AVVERTENZA. I vettori di E saranno considerati come matrici (1,n), cioè come vettori-riga. Quindi per esempio il vettore $x \in E$ sarà indicato con le sue componenti nel modo seguente:

(5) $$x = [x_1 \, , x_2 \, , \ldots\ldots \, , x_n] \, ;$$

pertanto il simbolo:

(6) $$x_\tau$$

indicherà la matrice (n,1) (vettore-colonna) che ha le stesse componenti.

In coerenza con le convenzioni adottate, prenderemo in considerazione n+1 vettori

$$(7) \qquad a^{\alpha} \qquad (1 \leq \alpha \leq n+1) \,,$$

e la scelta dell'origine come baricentro dell'insieme di punti si tradurrà nella validità della relazione seguente tra i vettori corrispondenti:

$$(8) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n+1} a^{\alpha} = 0 \,.$$

Ovviamente le proprietà geometriche degli enti che d'ora innanzi prenderemo in considerazione si tradurranno nell'esistenza di invarianti per il gruppo moltiplicativo delle matrici ortogonali (n,n), gruppo che determina la geometria in E.

Ricordiamo qui che una matrice M viene detta ortogonale se, con le notazioni qui adottate, vale la relazione:

$$(9) \qquad M_{\tau} M = M M_{\tau} = I \,,$$

essendo I la matrice identica.

Dalla (9) si trae

$$(10) \qquad [\mathrm{Det}\,(M)]^2 = 1 \,; \qquad (^1)$$

in conseguenza di questa relazione si suol chiamare movimento rigido di E in sè la trasformazione lineare delle componenti di un vettore determinata da una matrice ortogonale il cui determinante vale 1; si chiameranno genericamente isometrie di E le trasformazioni date dal gruppo delle matrici ortogonali.

5 - Indicheremo d'ora innanzi con A la matrice (n,n+1) i cui elementi sono le componenti degli (1+n) vettori (7)-4; porremo quindi:

---

[1] Indicata con M una matrice quadrata, col simbolo «Det (M)» indichiamo il determinante di M.

(1) $A = [a_i^\alpha] \qquad (1 \leq i \leq n \, , 1 \leq \alpha \leq n + 1)$.

Per la matrice A supporremo valida la seguente
IPOTESI. I determinanti delle n + 1 matrici quadrate di ordine n contenute nella A sono tutti diversi da zero.

Porremo poi:

(2) $B = A_\tau \, A$;

la B è quindi una matrice (n + 1, n + 1), il cui determinante risulta nullo, in forza di note proprietà.

Indichiamo con u il vettore ad n + 1 componenti, tutte uguali ad 1. Con le notazioni adottate la (8)-4 può essere scritta nella forma:

(3) $A \, u_\tau = 0$;

di conseguenze, in forza della (2) si avrà:

(4) $B \, u_\tau = 0$.

Porremo:

(5) $C = A \, A_\tau$;

la C è quindi una matrice (n,n) il cui determinante è positivo, perché uguale alla somma dei quadrati dei determinanti delle n + 1 matrici quadrate contenute in A, nominate sopra; ciò a seguito di un noto teorema di calcolo matriciale. Si avrà quindi:

(6) $\mathrm{Det}\,(C) > 0$.

Indicheremo con il simbolo H la matrice (n + 1, n + 1) che si ottiene «orlando in basso» la matrice A con il vettore u, sopra definito. Si verifica che è:

(7) $\mathrm{Det}\,(H) > 0$

in conseguenza della (6).

Indicheremo con il simbolo Q^α la matrice (n + 1, n) che si ottiene dalla H, or ora definita, sopprimendo la colonna di indice α.

Infine indicheremo con il simbolo C^α la matrice (n, n) data da:

$$C^\alpha = Q^\alpha_\tau Q^\alpha . \tag{8}$$

In base agli sviluppi precedenti, si verifica che, per ogni valore di α si ha:

$$\mathrm{Det}\,(C^\alpha) > 0 . \tag{9}$$

6 - Indichiamo con $\mathcal{A}$ l'insieme dei primi n + 1 numeri naturali, ponendo quindi:

$$\mathcal{A} = \{1, 2, ..., n, n + 1\} . \tag{1}$$

Indicheremo con il simbolo $\mathcal{S}(A)$ e chiameremo «simplesso ad n dimensioni» l'insieme dei punti x che si possono esprimere nella forma:

$$x = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} a^\alpha v_\alpha \tag{2}$$

essendo v_α certi n + 1 numeri reali che soddisfano alle condizioni:

$$\forall\, \alpha \left\{ v_\alpha \geq 0 \, ; \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} v_\alpha = 1 \right\} . \tag{3}$$

Nel seguito, quando non vi sarà pericolo di equivoci, richiameremo l'insieme considerato con il simbolo semplice $\mathcal{S}$.

Sia ora $\mathcal{P}$ un sottoinsieme proprio di r + 1 indici di $\mathcal{A}$ (con r > 0).

L'insieme dei punti x dati da:

$$x = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}} a^\alpha v_\alpha \, ; \; v_\alpha \geq 0 \, ; \sum_{\alpha \in \mathcal{P}} v_\alpha = 1 \tag{4}$$

è un simplesso ad r dimensioni che chiameremo, secondo l'uso, «faccia» del simplesso $\mathcal{S}$; i punti:

$$a^\alpha \qquad (\alpha \in \mathcal{P}) \tag{5}$$

saranno detti «vertici» di tale faccia.

In particolare, indicati con γ e β due elementi di $\mathcal{N}$, indicheremo con il simbolo $S^{\beta\gamma}$ l'insieme dei punti x dati da:

$$(6) \qquad x = \sum_{\alpha\neq\beta,\alpha\neq\gamma} a^{\alpha} v_{\alpha} \; ; \; v_{\alpha} \geq 0 \; ; \quad \sum_{\alpha\neq\beta,\alpha\neq\gamma} v_{\alpha} = 1 \, .$$

Il punto $h^{\beta\gamma}$ dato da:

$$(7) \qquad h^{\beta\gamma} = \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha\neq\beta,\alpha\neq\gamma} a^{\alpha}$$

è il baricentro dei vertici del simplesso $S^{\beta\gamma}$.

Ancora più in particolare, dati due punti a^{β} ed a^{γ}, la faccia ad una dimensione del simplesso Σ che ha questi due punti come vertici sarà indicta con il simbolo:

$$(8) \qquad \langle a^{\beta}, a^{\gamma} \rangle$$

e chiamata anche «spigolo» del simplesso $\mathcal{S}$; il suo baricentro sarà indicato con il simbolo $m^{\beta\gamma}$ ed è dato da:

$$(9) \qquad m^{\beta\gamma} = \frac{a^{\beta} + a^{\gamma}}{2} \; ;$$

esso è ovviamente il punto medio del segmento che ha come estremi i punti a^{β} ed a^{γ}.

7 - Indichiamo ora con il simbolo $H^{\alpha}(x)$ la matrice che si ottiene dalla H (sopra definita) sostituendo gli elementi della colonna di indice α con i numeri:

$$(1) \qquad x_1 \, , \, x_2 \, , \, \ldots\ldots \, , \, x_n \, , \, 1.$$

La equazione:

$$(2) \qquad \mathrm{Det}\,(H^{\alpha}(x)) = 0$$

rappresenta l'iperpiano che contiene la faccia di $\mathcal{S}$ che ha come vertici i punti (1)-5 con esclusione di a^α; diremo che tale faccia è «opposta» al vertice a^α del simplesso $\mathcal{S}$.

Dati comunque due indici α e β appartenenti ad $\mathcal{A}$, l'equazione:

$$(3) \qquad \mathrm{Det}\,(H^\alpha\,(x)) = \mathrm{Det}\,(H^\beta\,(x))$$

rappresenta un iperpiano passante per la faccia ad n-2 dimensioni del simplesso $\mathcal{S}$, comune alle due facce opposte ai vertici a^α ed a^β.

OSSERVAZIONE 1. Tra le $n\,(n + 1)/2$ equazioni lineari (3) solo n sono indipendenti. Tenendo presente la (3)-5, si verifica che tutte le equazioni (3), quale che sia la coppia di indici α e β, hanno come soluzione il vettore nullo, cioè i numeri:

$$(4) \qquad x_1 = x_2 = \ldots\ldots = x_n = 0$$

che sono le coordinate del baricentro dei punti (1)-5.

Possiamo quindi dire che tale punto è una funzione simmetrica dei vertici del simplesso $\mathcal{S}$, secondo il significato che abbiamo convenuto di dare a questa frase nel Paragrafo 2.

8 - Si consideri ora la funzione:

$$(1) \qquad f^\alpha\,(x) = a^\alpha_\tau\, x_\tau - a^\alpha_\tau\, a^\alpha_\tau/2\ ;$$

indicati con α e β due indici dell'insieme N, si consideri l'equazione:

$$(2) \qquad f^\alpha\,(x) = f^\beta\,(x)\ :$$

essa rappresenta l'iperpiano che passa per il punto medio $m^{\alpha\beta}$ del segmento $<a^\alpha, a^\beta>$ ed è perpendicolare al segmento stesso.

OSSERVAZIONE 2. Tra le $n\,(n + 1)/2$ equazioni (2) soltanto n sono indipendenti; esse defiscono quindi un punto Γ che chiameremo circumcentro del simplesso.

Invero l'iperpiano rappresentato dalla (2) è luogo dei punti equidistanti dai vertici a^α ed a^β del simplesso $\mathcal{S}$; quindi il punto definito simmetricamente dal sistema delle equazioni (2) ha distanza uguale da tutti i vertici, ed è dunque il centro della ipersfera che passa per essi.

9 - Si consideri la funzione:

(1) $g^\alpha(x) = (n\text{-}1)\, a^\alpha x_\tau + a^\alpha a^\alpha_\tau$;

indicati con α e β due indici qualunque dell'insieme I, l'equazione:

(2) $g^\alpha(x) = g^\beta(x)$

rappresenta l'iperpiano che passa per il baricentro del simplesso $S^{\alpha\beta}$, e che è perpendicolare al segmento $<a^\alpha, a^\beta>$.

OSSERVAZIONE 3. Tra le $n(n+1)/2$ equazioni (2) soltanto n sono indipendenti. Esse definiscono un punto L, che verrà chiamato «punto di Monge» del simplesso.

Si verifica che nel caso $n = 2$ tale punto è l'ortocentro del simplesso (che in questo caso è un triangolo) e per $n = 3$ tale punto coincide con il punto di Monge del tetraedro.

OSSERVAZIONE 4. I tre punti finora considerati: baricentro, circumcentro, punto di Monge, quando sono distinti, sono allineati: infatti la trasformazione dello spazio in sé che porta un punto x nel punto y dato da:

(3) $(n - 1)\, y + 2\, x = 0$

trasforma il sistema di equazioni (1) nel sistema (2) -8 e quindi anche il punto che è soluzione dell'uno in quello che è soluzione dell'altro.

10 - Riprendendo le definizioni e le convenzioni introdotte nel paragrafo 5 indichiamo qui con il simbolo A^α la matrice quadrata (n, n) che si ottiene dalla A sopprimendo la colonna di indice α; poniamo poi:

(1) $D^\alpha = \mathrm{Det}\,(C^\alpha) - \mathrm{Det}\,(A^\alpha A^\alpha_\tau)$:

OSSERVAZIONE 5. Si ha:

(2) $D^\alpha > 0$;

infatti, a norma di un noto teorema sulle matrici, Det (C^α) è la somma dei quadrati dei determinanti delle $n + 1$ matrici quadrate di ordine n che si possono estrarre dalla matrice Q^α; una di tali matrici è ovviamente la A^α, e tutti tali determinanti sono diversi da zero, in forza delle ipotesi formulate.

Indichiamo ora con il simbolo ε uno dei due numeri $+1$ oppure -1, e poniamo:

$$(3) \qquad d^\alpha(x) = \varepsilon_\alpha \, \mathrm{Det}\,(H^\alpha(x))/\sqrt{D^\alpha}\ .$$

L'equazione:

$$(4) \qquad d^\alpha(x) = 0$$

potrebbe essere chiamata (in analogia con quanto si fa nella Geometria analitica elementare) «equazione normale» dell'iperpiano su cui giace la faccia di $\mathscr{S}$ opposta al vertice a^α. Infatti, considerato un punto y che non appartiene a tale iperpiano, il numero

$$(5) \qquad d^\alpha(y)$$

dà la sua distanza dall'iperpiano stesso; la scelta di uno dei due valori possibili per ε_α nella (3) corrisponde alla scelta di una tra le due possibili orientazioni dell'iperpiano come positiva.

Si considerino ora le equazioni:

$$(6) \qquad \varepsilon_\alpha \, d^\alpha(x) = \varepsilon_\beta \, d^\beta(x)\ ,$$

nelle quali ε_α ed ε_β rappresentano possibili scelte tra i due valori attribuiti alla costante. Nella (6) sono rappresentati ovviamente due iperpiani, passanti per la faccia ad (n-1) dimensioni comune alle due facce opposte ad a^α ed a^β: infatti le scelte che danno iperpiani distinti sono soltanto quelle che corrispondono a valori di segno concorde oppure discorde per ε_α ed ε_β.

OSSERVAZIONE 6. Fatta una scelta per i valori delle costanti ε, tra le $n(n + 1)/2$ equazioni (6) soltanto n sono indipendenti tra loro. Se esse sono compatibili, definiscono un punto che è funzione simmetrica dei vertici del simplesso.

OSSERVAZIONE 7. Il significato della clausola precauzionale enunciata nella osservazione precedente sarà reso chiaro dagli esempi che prenderemo in considerazione in seguito.

OSSERVAZIONE 8. Le possibili scelte dei valori delle costanti ε che danno luogo a sistemi di equazioni tra loro diversi sono ovviamente 2^n. Ciò si verifica facilmente scegliendo di scrivere il sistema di equazioni (6) indipendenti tra loro per esempio della forma:

$$(7) \qquad \varepsilon_\alpha d^\alpha(x) = d^{n+1}(x)\ ;\ 1 \le \alpha \le n\ .$$

Ovviamente una opportuna scelta dei valori delle costanti ε conduce ad un punto interno al simplesso $\mathscr{S}$ che ha distanze uguali dagli iperpiani su cui giacciono le facce del simplesso; tale punto è quindi centro della iperfera che si può chiamare inscritta nel simplesso. Una discussione più precisa del sistema di equazioni (6) in casi particolari sarà data in seguito.

OSSERVAZIONE 9. Dagli sviluppi precedenti, ed in particolare dalla Osservazione 4 e dai sistemi di equazioni (2)-8 e (2)-9 si ha che se uno dei due punti, circumcentro o punto di Monge, cade sul baricentro, anche l'altro viene a cadere nello stesso punto.

11 - Abbiamo finora preso in considerazione certi punti che sono definiti simmetricamente rispetto ai vertici di un simplesso $\mathscr{S}$. Osserviamo ora che è possibile dare un significato più preciso al concetto di simmetria, collegandoci con l'impiego che si fa di questo concetto, e dei termini che lo rappresentano, nel linguaggio quotidiano.

Limitandoci alla Geometria, possiamo osservare che il giudizio di «simmetria» di una figura è collegato in generale con la esistenza di trasformazoni dell'intero ambiente cui la figura appartiene, trasformazioni che mutano la figura in sé stessa: così un triangolo isoscele è considerato «più simmetrico» di un triangolo scaleno perché esiste una isometria involutoria che muta il piano in sé ed il triangolo in sé. Ed in questo ordine di idee il triangolo equilatero è considerato «più simmetrico» del triangolo isoscele perché esiste un gruppo di 6 isometrie che mutano in sé il piano ed il triangolo. Analoghe considerazioni si potrebbero fare per quanto riguarda le figure dello spazio ordinario.

Partendo da queste generiche considerazioni, diremo che un simplesso dello spazio euclideo E ad n dimensioni è regolare se esso è mutato in sé da un gruppo di $(n + 1)!$ isometrie, isomorfo al gruppo delle $(n + 1)!$ permutazioni di $n + 1$ oggetti.

Le pagine che seguono sono dedicate appunto alle determinazioni di proprietà di simplessi cosiffatti. A tal fine faremo alcuni richiami di proprietà note del calcolo matriciale.

Essendo p e q due elementi dell'insieme $\mathcal{N}$, indichiamo con il simbolo E (p, q) una matrice quadrata di ordine (n + 1) i cui elementi sono tutti nulli, eccetto quello appartenente alla riga p ed alla colonna q che è uguale ad 1.

Indicheremo, come si fa di solito, con il simbolo I la matrice identica, che ha uguali ad 1 tutti gli elementi della diagonale principale; con il simbolo introdotto, tale matrice può essere espressa nella forma:

$$(1) \qquad I = \sum_{p=1}^{n+1} E\,(p, p)\,.$$

Indicheremo poi con il simbolo S (p, q) e chiameremo «matrice di scambio» la matrice quadrata di ordine (n + 1) che si può esprimere nel modo seguente:

$$(2) \qquad S\,(p, q) = I - E\,(p, p) - E\,(q, q) + E\,(p, q) + E\,(q, p)\,.$$

L'elemento di posto i, k della matrice S (p, q) sarà indicato con il simbolo s (i, k, p, q) e può essere espresso facendo ricorso ai simboli δ_{ik} di Kronecker, cioè alle funzioni dei due argomenti interi naturali i e k che prendono il valore 1 soltanto se i due indici sono tra loro uguali e sono nulli in tutti gli altri casi; si ha infatti:

$$(3) \qquad s\,(i, k, p, q) = \delta_{ik} - \delta_{ik}\,\delta_{ip} - \delta_{ik}\,\delta_{kq} + \delta_{ip}\,\delta_{kq} + \delta_{iq}\,\delta_{kp}\,.$$

Il nome di «matrice di scambio» che abbiamo dato alla matrice S (p, q) è giustificato dalla seguente proprietà ben nota: indicata con A una qualunque matrice con (n + 1) colonne, la matrice

$$(4) \qquad A' = A\,S\,(p, q)$$

ha tutte le sue colonne coincidenti con quelle della A, ad eccezione di quelle di posto p e q, che sono scambiate tra loro.

OSSERVAZIONE 10. Il quadrato di ogni matrice di scambio è l'identità; inoltre ogni matrice di scambio è simmetrica rispetto alla diagonale principale, ed è ortogonale.

Indicheremo col simbolo P e chiameremo «matrice di permutazione» una matrice quadrata di ordine (n + 1) che è prodotto di un numero finito di matrici di scambio. Il nome di «matrice di permutazione» che abbiamo dato ad una matrice P è giustificato dal fatto che, data una matrice A qualunque ad (n + 1) colonne, la matrice:

(5) $\qquad A' = A\,P$

ha tutte le sue colonne che risultano da quelle di A, permutate secondo il prodotto degli scambi corrispondenti alle matrici con cui la P è stata costruita.

OSSERVAZIONE 11. Ogni matrice di permutazione è ortogonale.

Inoltre le matrici di permutazione formano un gruppo finito di (n + 1)! elementi, isomorfo a quello delle (n + 1)! permutazioni di n + 1 oggetti. Si consideri ora la matrice (n, n + 1) A, introdotta nel paragrafo 3, le cui colonne sono costituite dagli elementi dei vettori a^{α}, vertici del simplesso $\mathcal{S}$, che hanno il loro baricentro nell'origine.

Sia M una matrice ortogonale, che quindi realizza una isometria nello spazio euclideo che stiamo considerando; è chiaro che l'isometria data dalla M porta il simplesso $\mathcal{S}$ in se stesso se e solo se essa realizza una permutazione tra i vertici dello stesso; pertanto si ha la:

OSSERVAZIONE 12. Condizione necessaria e sufficiente perché una isometria dello spazio, realizzata da una matrice ortogonale M, porti in sé il simplesso, è che esista una matrice di permutazione P tale che si abbia:

(6) $\qquad M\,A = A\,P\,.$

Ricordando che nel paragrafo 5 abbiamo posto:

(7) $\qquad B = A_{\tau}\,A\,,$

dalla (6) si trae che vale la:

(8) $\qquad P\,B = B\,P\,.$

Ricordiamo ora che abbiamo indicato con u il vettore le cui (n = 1) componenti sono tutte uguali ad 1. Con queste notazioni si giunge a verificare la validità della seguente:

OSSERVAZIONE 13. Un matrice quadrata B di ordine (n + 1) che sia permutabile con ogni matrice di scambio, cioè per la quale valga la (7) per ogni matrice del gruppo P, è necessariamente della forma:

$$(9) \qquad B = p\,I + q\,u_\tau\,u\,,$$

dove p e q sono due numeri reali.

Se poi la matrice B soddisfa ulteriormente alla condizione (4)-5, e precisamente se si ha:

$$(10 \qquad B\,u_\tau = 0\,,$$

allora si ha necessariamente:

$$(11) \qquad p + (n + 1)\,q = 0$$

e quindi la matrice B è espressa dalla:

$$(12) \qquad B = (n + 1)\,p\,I - p\,u_\tau\,u\,.$$

Avvalendosi delle espressioni trovate e delle relazioni dimostrate si giunge ad accertare che la matrice (n, n) C data da:

$$(13) \qquad C = A\,A_\tau$$

vale p (n + 1) volte la matrice identica di ordine n.

Si trae di qui e dalla (6) che le matrici ortogonali del gruppo di isometrie che portano in sé il simplesso regolare $\mathcal{S}$(A) dello spazio euclideo ad n dimensioni sono espresse dalla:

$$(14) \qquad p\,(n + 1)\,M = A\,P\,A_\tau\,.$$

OSSERVAZIONE 14. Da quanto precede si ha che in questo caso tutti i vettori a^α hanno la stessa norma e quindi, ricordando l'Osservazione 9 (paragrafo 10) in questo caso i tre punti del simplesso: circumcentro, punto di Monge e baricentro coincidono.

12 - Gli sviluppi precedenti permettono di costruire un particolare simplesso regolare, con $p = 2/(n + 1)$, nello spazio ad n dimensioni; la matrice

$$(1) \qquad A = [a_i^\alpha] \quad 1 \leq \alpha \leq n + 1 \quad ; \quad 1 \leq i \leq n$$

ha i suoi elementi formati con la legge seguente:
1) $\alpha = 1$ (prima colonna):

$$a_1^1 = -1 \quad ; \quad i > 1 \quad a_i^\alpha = -\sqrt{2/i\,(i+1)}$$

2) $\alpha = 2$ (seconda colonna):

$$a_1^2 = 1 \quad ; \quad i > 1 \quad a_i^\alpha = -\sqrt{2/i\,(i + 1)}$$

3) $\alpha > 2$:

$$\text{per } \alpha > i + 1 \qquad a_i^\alpha = 0$$

$$\text{per } \alpha = i + 1 \qquad a_i^\alpha = \sqrt{2i/(i + 1)}$$

$$\text{per } \alpha < i + 1 \qquad a_i^\alpha = -\sqrt{2/i\,(i + 1)}$$

Con questi dati particolari si hanno i seguenti valori per le grandezze caratteristiche del simplesso:
Norma di un vettore qualunque:

$$(2) \qquad |a^\alpha|^2 = 2n/(n + 1)$$

Angolo ϑ tra due vettori qualunque a^α ed a^β:

$$(3) \qquad \cos\vartheta = -1/n$$

Si ha poi che la lunghezza di uno spigolo qualesivoglia vale 2.

È chiaro che un qualunque altro simplesso regolare, avente l'origine come baricentro dei vertici, avrà come coordinate dei vertici gli elementi di una matrice A' che sarà data, in funzione della particolare matrice A della tabella, dalla formula:

$$(4) \qquad A' = p\,M\,A\,,$$

dove p è un qualunque numero reale ed M una qualunque matrice ortogonale di ordine n.

13 - Partendo dai risultati ora acquisiti siamo in grado di completare la discussione iniziata nel paragrafo 10 riguardante la determinazione di altri punti, collegati simmetricamente con il simplesso, e diversi dal baricentro, circumcentro e punto di Monge.

Tale discussione può essere portata a compimento nella ipotesi che il simplesso sia regolare, secondo la definizione che abbiamo data di questo concetto nel paragrafo 11.

In queste condizioni ogni vettore a^α è normale alla faccia del simplesso che è opposta al vertice di indice α; quindi ponendo:

$$(1) \qquad r^\alpha (x) = a^\alpha x_\tau - q \,,$$

dove q è un numero opportuno, indipendente da α, il sistema di equazioni del paragrafo 9 può qui essere riscritto nella forma seguente:

$$(2) \qquad \varepsilon_\alpha \, r^\alpha (x) = r^{n+1} (x) \qquad (1 \le \alpha \le n) \,;$$

avendo indicato anche qui con ε certe n costanti che possono assumere soltanto i valori +1 oppure -1.

Analizziamo ora la matrice quadrata dei coefficienti del sistema (2); a tal fine consideriamo la matrice (n + 1, n) che qui chiameremo K, ed i cui elementi saranno indicati con $e_{\alpha\beta}$ $(1 \le \alpha \le n + 1, 1 \le \beta \le n)$ e sono dati dalle leggi seguenti:

a) per $1 \le \alpha \le n \qquad e_{\alpha\beta} = \varepsilon_\alpha \, \delta_{\alpha\beta}$

b) per $\alpha = n + 1$ (ultima riga) $e_{n+1,\beta} = -1$.

Il determinante dei coefficienti di un sistema (2) è il determinante della matrice quadrata di ordine n:

$$(3) \qquad A\,K \,.$$

A norma di un noto teorema sulle matrici, il determinante della (3) vale la somma dei prodotti dei determinanti delle n + 1 matrici quadrate estratte dalla A per i determinanti delle corrispondenti matrici quadrate estratte dalla E. Ora, in forza della regolarità del simplesso S, i valori assoluti dei determinanti delle matrici quadrate estratte dalla A sono tutti uguali. Pertanto la diversità da zero, o la nullità, della matrice (3) sarà data dalla somma dei valori dei determinanti delle n + 1 matrici quadrate estratte dalla K.

Ora si verifica che tra questi ultimi determinanti, uno è dato dal prodotto di tutti i valori delle costanti ε, e gli altri n sono dati da tutti i possibili prodotti di (n-1) tra i simboli stessi. Ne consegue che, a meno di un fattore diverso da zero, il determinante della matrice (3) è dato da:

(4) $\qquad 1 + \text{somma di } n \text{ valori } \varepsilon \, .$

Possiamo quindi enunciare la seguente:

OSSERVAZIONE 15. Per n pari esistono 2^n punti definiti simmetricamente rispetto ai vertici del simplesso $\mathcal{S}$. Se invece n è dispari, cioè si ha:

(5) $\qquad n = 2m + 1$

vi sono $\begin{pmatrix} n \\ m+1 \end{pmatrix}$ sistemi (2) che sono incompatibili; quindi i punti definiti simmetricamente rispetto al simplesso sono in numero di:

(6) $\qquad 2^n - \begin{pmatrix} n \\ m+1 \end{pmatrix} .$

È chiaro che ogni isometria che muta in sé il simplesso $\mathcal{S}$ muta in sé anche la famiglia di punti ora definiti.

14 - La formula (14)-11 fornisce l'espressione del gruppo di isometrie che mutano in sé un simplesso regolare $\mathcal{S}$, mettendo in evidenza l'isomorfismo tra questo gruppo e quello delle sostituzioni tra n oggetti.

Consegue di qui che si possono interpretare geometricamente le note proprietà dei gruppi di sostituzioni. Questa interpretazione permette di porre in evidenza il caso del tetraedro che viene chiamato «isoscele» o anche «equifacciale» dello spazio ordinario (Cfr. [1]), il quale è mutato in sé da un gruppo trirettangolo di isometrie, senza essere regolare, nel senso che abbiamo dato qui a tale termine. La possibilità di fenomeni analoghi per $n > 3$ è esclusa in forza delle note proprietà del gruppo delle sostituzioni su n oggetti, per $n > 4$.

15 - Molti degli sviluppi precedenti possono essere estesi agli spazi a curvatura costante della geometria non-euclidea. A questo scopo utilizzeremo l'immagine di uno spazio cosiffatto che si ottiene istituendo una metrica proiettiva in uno spazio proiettivo reale, in relazione ad una quadrica assoluto dello spazio stesso. Lo spazio a curvatura positiva sarà ottenuto quando la quadrica sarà non degenere ma senza punti reali; lo spazio a curvatura negativa sarà ottenuto quando la quadrica avrà punti reali.

Sia V_{n+1} uno spazio vettoriale ad $(n + 1)$ dimensioni; un vettore $x \in V_{n+1}$ sarà indicato, secondo le avvertenze del paragrafo 4, con notazioni del tipo:

$$x = [x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots , x_n] . \tag{1}$$

Come è noto, è possibile costruire uno spazio E, proiettivo reale a n dimensioni, assumendo come punti di E le classi di equivalenza dei vettori non nulli di V_{n+1} rispetto al gruppo delle omotetie vettoriali, cioè delle trasformazioni del tipo:

$$x' = kx \qquad (k \text{ reale non nullo}) . \tag{2}$$

La condizione che vieta di considerare il vettore nullo di V sarà espressa dalla:

$$x\, x_{\tau} > 0 . \tag{3}$$

Indichiamo con V^* l'insieme dei vettori di V_{n+1} con esclusione del vettore nullo, cioè l'insieme dei vettori di V_{n+1} che soddisfano alla (3); come è noto, sussiste una surjezione canonica tra l'insieme V^* e lo spazio proiettivo E. Nel seguito, quando accenneremo ad un «punto x di E» intenderemo indicare il punto che corrisponde, nella surjezione suddetta, ad un vettore che soddisfa alla (3) ed a tutti i vettori della classe di equivalenza.

16 - Consideriamo anzitutto il caso di uno spazio a curvatura costante positiva; a tal fine consideriamo la funzione:

$$(1) \qquad F(x) = x\, x_{\tau} \,.$$

Diremo che la equazione:

$$(2) \qquad F(x) = 0$$

rappresenta una quadrica $\mathfrak{F}$, non degenere, che assumeremo come assoluto nello spazio E. Da quanto precede, essa non ha punti reali.

Indicando con x, y, z ... dei vettori di V^*, porremo:

$$(3) \qquad F(x \mid y) = x\, y_{\tau} = y\, x_{\tau} \,.$$

Si hanno ovviamente le seguenti proprietà:

$$(4) \qquad \begin{aligned} &F(x \mid x) = F(x) \\ &F(x \mid y) = F(y \mid x) \\ &F(kx \mid y) = k\,F(x \mid y) \text{ con k reale qualunque} \\ &F(x \mid y + z) = F(x \mid y) + F(x \mid z)\,. \end{aligned}$$

Due vettori di V^*, x, y tali che sia:

$$(5) \qquad F(x \mid y) = 0$$

saranno detti, secondo l'uso, «perpendicolari», ed i punti di E che sono i loro corrispondenti saranno detti «coniugati» rispetto alla quadrica $\mathfrak{F}$; e si dirà che la (5) esprime la «relazione di coniugio» dei punti stessi rispetto alla quadrica.

Come è noto, lo spazio E può anche essere considerato come spazio di piani (duale del primo); indicheremo con il simbolo:

$$(6) \qquad w = [w_0 \,, w_1 \,, \ldots\ldots \,, w_n]$$

il vettore delle coordinate di un iperpiano w; la condizione di appartenenza di un punto x ad un iperpiano u sarà scritta nella forma:

$$(7) \qquad x\, w_{\tau} = 0 \,,$$

e la quadrica assoluto $\mathfrak{J}$ può essere considerata anche come inviluppo di iperpiani. Ponendo:

$$(8) \qquad G(w) = w\, w_{\tau} \,,$$

la quadrica assoluto inviluppo può essere rappresentata nella forma:

$$(9) \qquad G(w) = w\, w_{\tau} = 0 \,.$$

Si considerino ora due punti x, y di E, e poniamo:

$$(10) \qquad \Delta(x, y) = [F(x \mid y)]^2 - F(x)\, F(y) \,.$$

Si verifica senza difficoltà che si ha in ogni caso:

$$(11) \qquad \Delta(x, y) \leq 0 \,,$$

e che il caso dell'uguaglianza corrisponde biunivocamente alla coincidenza dei due punti.

Si può quindi definire in E una metrica proiettiva, definendo distanza tra due punti x, y il numero (Cfr. [2]):

$$(12) \qquad \mathrm{dist}(x, y) = \frac{1}{2} \log [(F(x \mid y) - \sqrt{\Delta(x, y)})\sqrt{(F(x \mid y)} + \sqrt{\Delta(x, y)})] \,.$$

Come è noto, quando si assume la (12) come definizione della distanza tra due punti, questa risulta uguale a $\pi/2$ quando i due punti stessi sono coniugati rispetto alla quadrica assoluto. Si trae pure senza difficoltà che, come conseguenza della (12) si ha:

$$(13) \qquad \cos[\mathrm{dist}(x, y)] = F(x \mid y) / \sqrt{F(x)\, F(y)} \,.$$

È pure noto che in modo analogo si definisce l'angolo tra due iperpiani dello spazio, in relazione alla quadrica inviluppo la cui equazione è fornita dalla (8).

In conseguenza della definizione (12), chiameremo isometrie dello spazio E le trasformazioni lineari che mutano in sé la quadrica assoluto; come è noto, tali trasformazioni sono fornite dal gruppo ad $n(n + 1)/2$ parametri delle matrici ortogonali, cioè delle matrici M tali che sia:

(14) $$M\,M_\tau = M_\tau\,M = I\,.$$

Le trasformazioni del sottogruppo, normale di indice due, di questo gruppo fornite dalle matrici ortogonali per le quali si ha:

(15) $$\mathrm{Det}\,(M) = 1$$

saranno anche dette movimenti dello spazio E in sé.

17 - Consideriamo ora n + 1 vettori dell'insieme V*; diremo che essi sono linearmente indipendenti se tali sono gli n + 1 punti di E che ad essi corrispondono. Indichiamo con A la matrice (n + 1, n + 1) i cui elementi

(1) $$a^\alpha_i \qquad (1 \leq \alpha \leq n+1 \quad ; \quad 0 \leq i \leq n)$$

sono le componenti dei vettori considerati; precisamente considereremo α come indice di colonna nella matrice A; e pertanto gli elementi di una medesima colonna della matrice stessa saranno le componenti di un medesimo vettore di V*. Per l'ipotesi di indipendenza enunciata poco sopra si avrà:

(2) $$\mathrm{Det}\,(A) \neq 0\,.$$

Richiamiamo qui le notazioni che abbiamo introdotto sopra (N. 6); in particolare indicheremo con $\mathcal{P}$ l'insieme dei primi (n + 1) numeri naturali, e con P un suo sottoinsieme proprio, di r + 1 elementi (r > 0).

Supporremo di aver scelto gli elementi delle classi di equivalenza di V* in modo tale che siano soddisfatte le relazioni:

(3) $$F\,(a^\alpha) = F\,(a^\beta) \qquad \alpha, \beta \in \mathcal{N}\,.$$

È chiaro che le relazioni (3) sono in numero di n (n + 1)/2 ma che soltanto n tra di esse sono linearmente indipendenti.

Scelte le componenti dei vettori a^α in modo che siano soddisfatte le (3), consideriamo l'insieme di punti corrispondenti ai vettori:

(4) $$x = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} a^\alpha\, v_\alpha$$

essendo i numeri reali v_α legati dalle condizioni:

(5) $$v_\alpha \geq 0 \quad , \quad \alpha \in \mathcal{A} .$$

Diremo che i punti di E corrispondenti ai vettori (4) sotto le condizioni (5) costituiscono un simplesso $\mathcal{S}$ ad n dimensioni dello spazio E; ed i punti a^α saranno detti vertici di tale simplesso.

OSSERVAZIONE 16. Una volta fissate le componenti degli n + 1 vettori a^α, oppure, se si vuole, gli elementi delle colonne della matrice A (beninteso soddisfacenti alle (3)), è possibile prendere in considerazione 2^n simplessi analoghi; questi si ottengono facilmente con la procedura seguente:
Indicate con

(6) $$\varepsilon_1 , \varepsilon_2 , \ldots\ldots , \varepsilon_n$$

certe n costanti, ognuna delle quali vale + 1 oppure -1, si costruisce la matrice (n + 1, n + 1) K che ha nulli tutti gli elementi, esclusi quelli della diagonale principale: l'ultimo di questi viene posto uguale ad 1, ed i primi n uguali alle costanti ε.
Si ponga ora:

(7) $$A\,(\varepsilon_n , \varepsilon_2 , \ldots\ldots , \varepsilon_n) = AK .$$

I vettori costituenti le colonne della $A\,(\varepsilon_1 , \varepsilon_2 , \ldots\ldots , \varepsilon_n)$ possono essere sostituiti nella (4), per fornire così, sempre sotto le condizioni (5) un simplesso che indicheremo con il simbolo $\mathcal{S}(\varepsilon_1 , \varepsilon_2 , \ldots\ldots , \varepsilon_n)$.

Con queste convenzioni, il simplesso $\mathcal{S}$ di partenza dovrebbe essere indicato con il simbolo $\mathcal{S}(1, 1, \ldots\ldots, 1)$; tuttavia continueremo ad indicarlo semplicemente con il simbolo $\mathcal{S}$ quando non ci sarà pericolo di confusione.

18 - In analogia con quanto è stato fatto sopra (N. 6) l'insieme costituito dai punti:

(1) $$x = \sum_{\alpha \in \mathcal{S}} a^\alpha v_\alpha \quad ; \quad v_\alpha \geq 0 \quad ; \quad v_\alpha \in \mathcal{S}$$

sarà chiamato anche qui faccia ad r dimensioni del simplesso $\mathcal{S}$, ed i punti:

$$(2) \qquad a^{\alpha} \qquad (\alpha \in \mathcal{P})$$

saranno detti vertici della faccia. In particolare, indicati con γ e β due elementi di $\mathcal{A}$, indicheremo con il simbolo $S^{\gamma\beta}$ l'insieme dei punti di E dati da:

$$(3) \qquad x = \sum_{\alpha \neq \beta,\ \alpha \neq \gamma} a^{\alpha} v_{\alpha} \quad ; \quad v_{\alpha} \geq 0 \,.$$

Ancora più in particolare, dati due punti a^{β} ed a^{γ}, la faccia ad una dimensione del simplesso $\mathcal{S}$ che ha questi due punti come vertici sarà indicata con il simbolo:

$$(4) \qquad < a^{\beta}, a^{\gamma} >$$

e chiamata spigolo del simplesso $\mathcal{S}$.
Si verifica che il punto:

$$(5) \qquad m^{\beta\gamma} = a^{\beta} + a^{\gamma}$$

ha distanze uguali da a^{β} e da a^{γ}, rispetto alla metrica data dalla (12)-16. Pertanto esso sarà chiamato punto medio del simplesso ad una dimensione rappresentato dalla (4).

Il punto corrispondente al vettore h, che si ottiene dalle (4)-17 ponendo:

$$(6) \qquad v_{\alpha} = 1 \quad , \quad \alpha \in \mathcal{A}$$

sarà chiamato baricentro del simplesso $\mathcal{S}$.

Ricordiamo ora che abbiamo indicato (N. 5) col simbolo u il vettore ad (n + 1) componenti, tutte uguali ad 1. Pertanto si potrà scrivere:

$$(7) \qquad h_{\tau} = A\, u_{\tau} \,.$$

Il punto h ora definito è ovviamente funzione simmetrica dei vertici del simplesso, secondo ciò che è stato detto sopra (N. 2).

19 - Indichiamo qui con il simbolo

(1) $H^{\alpha}(x) \qquad (\alpha \in \mathcal{N})$

la matrice quadrata di ordine (n + 1) che si ottiene dalla A sostituendo gli elementi della colonna di indice α rispettivamente con x_0, x_1, ... , x_n.

Ovviamente l'equazione:

(2) $\mathrm{Det}\,(H^{\alpha}(x)) = 0$

rappresenta l'iperpiano determinato dai vertici del simplesso $\mathcal{S}$, escluso a^{α}.

Si considerino ora le equazioni:

(3) $\mathrm{Det}\,(H^{\alpha}(x)) = \mathrm{Det}\,(H^{\beta}(x)) \qquad (\alpha, \beta \in \mathcal{N})$.

OSSERVAZIONE 17. Le (3) sono in numero di n (n + 1) /2. Tuttavia soltanto n tra di esse sono indipendenti; esse determinano una unica soluzione, che è fornita dal punto corrispondente al vettore h, definito dalla (7)-18.

20 - Poniamo ora, per ogni indice α:

(1) $f^{\alpha}(x) = F(x \mid a^{\alpha}) \qquad (\alpha \in \mathcal{N})$.

L'equazione:

(2) $f^{\alpha}(x) = 0$

rappresenta ovviamente l'iperpiano costituito dai punti di E che sono coniugati del vertice a^{α} del simplesso rispetto alla quadrica assoluto.

Si consideri ora l'equazione:

(3) $f^{\alpha}(x) = f^{\beta}(x) \qquad (\alpha, \beta \in \mathcal{N})$;

essa rappresenta l'iperpiano che passa per il punto medio $m^{\alpha\beta}$ del segmento $<a^{\alpha}, a^{\beta}>$ e che è perpendicolare (secondo la metrica angolare stabilita sopra al N. 16) al segmento stesso; ogni punto di questo iperpiano ha distanze uguali dai vertici del segmento.

OSSERVAZIONE 18. Le equazioni (3) sono in numero di n (n + 1)/2 ma soltanto n tra esse sono indipendenti; pertanto esse definiscono un punto Γ che è centro della sfera passante per i vertici del simplesso.

Anche questo punto è ovviamente funzione simmetrica dei vertici del simplesso, e può essere chiamato circumcentro del simplesso $\mathcal{S}$.

21 - Poniamo ora:

$$(1) \qquad g^{\alpha}(x) = F(x \mid a^{\alpha}) - F(h \mid a^{\alpha}) \qquad (\alpha \in \mathcal{N})$$

e consideriamo l'equazione:

$$(2) \qquad g^{\alpha}(x) = g^{\beta}(x) \qquad \alpha, \beta \in \mathcal{N}.$$

Essa rappresenta un ben determinato iperpiano che passa per il punto $h - a^{\alpha} - a^{\beta}$, che è baricentro del simplesso $S^{\alpha\beta}$ definito sopra (N. 10).

OSSERVAZIONE 19. Le equazioni come la (2) sono in numero di n (n + 1)/2; tuttavia soltanto n tra loro sono indipendenti. Esse definiscono pertanto un punto Γ che può esser chiamato punto di Monge del simplesso in analogia con quanto è stato fatto sopra (N. 9, Oss. 3).

OSSERVAZIONE 20. Si ha ovviamente:

$$(3) \qquad f^{\alpha}(y-h) = g^{\alpha}(x) \qquad (\alpha \in \mathcal{N}).$$

Si deduce di qui che i tre punti sopra definiti: baricentro, circumcentro, punto di Monge, quando sono distinti, appartengono ad una retta ben definita che è funzione simmetrica dei vertici del simplesso $\mathcal{S}$ e che possiamo anche in questo caso chiamare retta di Eulero del simplesso.

22 - Anche in questo caso, come sopra nei NN.4, 16, indichiamo con M una matrice ortogonale (n + 1, n + 1) che fornisce le isometrie nel nostro spazio, e con P una matrice (n + 1, n + 1) del gruppo delle permutazioni definito sopra nel N. 11.

Si consideri un simplesso $\mathcal{S}$, ed ancora si indichi con A la matrice $(n + 1, n + 1)$ le cui colonne sono le componenti di vettori di V^* ai quali corrispondono i vertici del simplesso; supponiamo che tali vettori soddisfino alle $n (n + 1)/2$ relazioni:

(1) $\quad F(a^\alpha) = F(a^\beta) \qquad (\alpha, \beta \in N)$

(Cfr. sopra N. 17).

Diremo che il simplesso $\mathcal{S}$ è regolare se in corrispondenza ad ogni matrice di permutazione P esiste una matrice ortogonale M tale che sia:

(2) $\quad MA = AP$.

OSSERVAZIONE 21. Se il simplesso $\mathcal{S}$ è regolare, le matrici M che soddisfano alla (2) formano un gruppo, ovviamente sottogruppo del gruppo di tutte le matrici ortogonali.

OSSERVAZIONE 22. Si supponga che la matrice A sia ortogonale, e cioè soddisfi alla relazione:

(3) $\quad A_\tau A = A A_\tau = I$.

Indicati con p e q due qualunque numeri reali, si costruisca l'insieme delle matrici:

(4) $\quad A^* = A(pI + q\, u_\tau u)$.

Si verifica che in queste ipotesi il gruppo delle matrici M che soddisfano alla:

(5) $\quad MA^* = A^*P$

è dato da:

(6) $\quad M = A P A_\tau$.

Viceversa, supponiamo che il simplesso $\mathcal{S}$ sia tale che valga la (2) per ogni matrice di permutazione P. Poniamo anche qui, come sopra al N. 5:

(7) $\quad B = A_\tau A$.

Di qui e dalla (2) si trae che deve essere:

$$(8) \qquad P\,B\,P = B$$

per ogni matrice di permutazione P. Pertanto si conclude che deve essere:

$$(9) \qquad B = pI + q\,u_\tau\, u \qquad p, q \in R\,.$$

OSSERVAZIONE 23. Per la matrice B, data dalla (9) si ha:

$$(10) \qquad \mathrm{Det}\,(B) = p^{n+1} + (n+1)\,p^n\,q\,.$$

Dalla (7) e da noti teoremi sulle matrici si ha quindi:

$$(11) \qquad p^n\,(p + (n+1)\,q) > 0\,.$$

Supponiamo ora che sia valida l'ipotesi:

$$(12) \qquad p > 0\,.$$

Esistono allora due numeri reali r, s tali che la matrice:

$$(13) \qquad A\,(rI + s\,u_\tau\, u)$$

sia ortogonale.

Infatti ciò significa che esiste un numero reale k tale che si abbia:

$$(14) \qquad (rI + s\,u_\tau\, u)'\,(pI + q\,u_\tau\, u)\,(rI + s\,u_\tau\, u) = kI\,,$$

e ciò si può ottenere quando r ed s siano legati a p e q dalla relazione:

$$(15) \qquad r^2\,q + 2rs\,(p + (n+1)\,q) + (n+1)\,s^2\,(p + (n+1)\,q) = 0\,.$$

La condizione (12), tenendo conto della (11), è sufficiente perché questa equazione in r, s sia soddisfatta da una coppia di numeri reali.

Pertanto in questo caso è possibile scegliere i numeri reali r ed s in modo che la matrice A data dalla (13) sia ortogonale.

Si conclude quindi che non soltanto ogni matrice del tipo della A* data dalla (4) (nella ipotesi (3)) corrisponde ad un simplesso regolare, ma che, viceversa, ogni matrice A corrispondente ad un simplesso $\mathscr{S}$ regolare, nella ipotesi (12), può essere rappresentata nella forma (4).

23 - Con riferimento alle notazioni presentate sopra (N. 15), prendiamo ora in considerazione il caso di uno spazio a curvatura costante negativa; a tal fine consideriamo la funzione:

$$(1) \qquad F(x) = R^2 (x_0)^2 - \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 .$$

In questo caso l'equazione:

$$(2) \qquad F(x) = 0$$

rappresenta una quadrca $\mathcal{J}$ non degenere a punti reali, che assumeremo come assoluto nello spazio E. Di questo spazio prenderemo in considerazione soltanto il sottoinsieme, che indicheremo con E*, costituito dai punti x tali che si abbia:

$$(3) \qquad F(x) > 0 .$$

Anche in questo caso la quadrica assoluto può essere vista come inviluppo di iperpiani tangenti. Conservando le notazioni sopra introdotte nel N. 16, l'equazione dell'inviluppo di iperpiani aderente alla quadrica è data da:

$$(4) \qquad G(w) = (w_0)^2 - R^2 \sum_{i=1}^{n} (w_i)^2 = 0 .$$

Si considerino ora due punti x e y di E*, e poniamo:

$$(5) \qquad \Delta(x, y) = [F(x \mid y)]^2 - F(x) F(y) .$$

Si verifica senza difficoltà che si ha in ogni caso:

$$(6) \qquad \Delta(x, y) \geq 0 ,$$

e che il segno di uguaglianza vale soltanto nel caso in cui i due punti siano coincidenti.

Si può quindi stabilire in E* una metrica proiettiva, definendo distanza tra due punti x, y il numero:

(7) $$\text{dist}\,(x, y) = K \log [(F\,(x \mid y) - \sqrt{\Delta\,(x, y)}) / (F\,(x \mid y) + \sqrt{\Delta\,(x, y)})]\,.$$

In modo analogo, si considerino due iperpiani, corrispondenti a vettori w, z: si verifica che se questi contengono dei punti di E*, si ha:

(8) $$G\,(w) < 0 \quad ; \quad G\,(z) < 0\,;$$

(9) $$G\,(w \mid z) = w_0 z_0 - R^2 \sum_{i=1}^{n} w_i z_i$$

si ottiene, in conseguenza delle ipotesi:

(10) $$\Delta\,(w, z) = [G\,(w \mid z)]^2 - G\,(w) \cdot G\,(z) < 0$$

e pertanto si può definire angolo dei due iperpiani il numero η tale che sia:

(11) $$\cos \eta = G\,(w \mid z) / \sqrt{G\,(w) \cdot G\,(z)}\,.$$

In conseguenza delle definizioni date, chiameremo isometrie dello spazio E* le omografie dello spazio E che portano in sé la quadrica assoluto $\mathcal{J}$.

Un sottogrppo delle isometrie è fornito ovviamente dal gruppo di omografie che corrispondono alle matrici del tipo:

(12) $$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$$

dove N è una matrice ortogonale: infatti una trasformazione corrispondente ad una matrice di questo tipo porta in sé, singolarmente, la forma quadratica:

$$(13) \qquad \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 .$$

OSSERVAZIONE 24. La condizione (6), la quale deve essere soddisfatta per ogni punto dell'insieme E^* che abbiamo preso in considerazione, porta che debba essere in ogni caso soddisfatta la condizione:

$$(14) \qquad x_0 \neq 0 .$$

Consideriamo ora un vettore x dell'insieme V^*, al quale corrisponda, nella surjezione di cui al N. 15 (che fa corrispondere ai vettori di V^* i punti di E) un punto $x \in E^*$.

Nella classe di equivalenza cui appartiene il vettore, conveniamo di scegliere la sottoclasse per cui è:

$$(15) \qquad x_0 > 0 .$$

24 - Consideriamo ora n + 1 punti linearmente indipendenti dell'insieme E^*. Siano:

$$(1) \qquad a_i^\alpha \qquad (1 \leq \alpha \leq n+1 \quad ; \quad 0 \leq i \leq n)$$

i vettori di V^* a cui corrispondono i punti di E^* nella surjezione di cui al N. 15. Indichiamo anche qui, come al N. 17, con A la matrice $(n + 1, n + 1)$ i cui elementi sono le componenti (1) dei vettori nominati. In conseguenza della ipotesi sui punti scelti, si avrà:

$$(2) \qquad \mathrm{Det}\,(A) \neq 0 .$$

Supporremo anche di aver scelto i vettori nelle corrispondenti classi di equivalenza in modo che siano valide le $n(n + 1)/2$ relazioni:

$$(3) \qquad F(a^\alpha) = F(a^\beta) \qquad (\alpha, \beta \in \mathcal{A})$$

e che inoltre valgano le:

$$(4) \qquad a_0^\alpha > 0 \quad ; \quad \alpha \in \mathcal{A} .$$

Consideriamo ora l'insieme dei punti di E^* corrispondenti ai vettori:

(5) $$x = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} a^\alpha v_\alpha$$

essendo i numeri v_α sottoposti alle condizioni:

(6) $$v_\alpha \geq 0 \quad ; \quad \alpha \in \mathcal{A} .$$

L'insieme $\mathcal{S}$ dei punti di E^* che così si ottengono sarà chiamato simplesso ad n dimensioni di E^*.

Adotteremo anche qui le convenizoni di scrittura e le denominazioni che abbiamo introdotto sopra nel N. 18.

Non vi sono difficoltà nel riconoscere che, con le convenzioni stabilite, rimane determinato un punto h, funzione simmetrica dei vertici del simplesso $\mathcal{S}$, che chiameremo anche in questo caso baricentro del simplesso stesso.

Si può osservare che, anche in questo caso, hanno senso le notazioni introdotte nel N. 19, e che valgono le considerazioni che sono state svolte in quella occasione; in particolare quindi il punto che abbiamo chiamato baricentro del simplesso è comune a certi n iperpiani, le cui equazioni si costruiscono a partire da quelle che definiscono le facce del simplesso $\mathcal{S}$.

25 - Anche nel caso presente, come nei NN. 20 e 21, si possono definire le funzioni:

(1) $$f^\alpha (x) = F (x \mid a^\alpha) \quad , \quad \alpha \in \mathcal{A} :$$

(2) $$g^\alpha (x) = F (x \mid a^\alpha) - F (h \mid a^\alpha) \quad , \quad \alpha \in \mathcal{A} ;$$

quindi si possono prendere in considerazione i sistemi di equazioni:

(3) $$f^\alpha (x) = f^\beta (x) \quad , \quad \alpha, \beta \in \mathcal{A}$$

(4) $$g^\alpha (x) = g^\beta (x) \qquad \alpha, \beta \in \mathcal{A} .$$

Nel caso presente si deve tuttavia osservare che i sistemi (3), (4) hanno soluzione in ogni caso; questa appartiene allo spazio proiettivo E, ma non è detto che, in generale, essa appartenga all'insieme E^*, caratterizzato dalla relazione (3)-23. Adottando in questo contesto il vocabolario abituale della geometria non euclidea, potremmo dire che le soluzioni dei sistemi (3) e (4) possono essere rappresentate da punti ideali. La determinazione dei casi in cui ciò non avviene sarà oggetto di una discussione che svolgeremo nel N. 26, almeno nel caso del sistema (3); la discussione del sistema (4) conduce a calcoli più laboriosi, che noi ometteremo, perché la procedura è formalmente del tutto analoga a quella della discussione del sistema (3). Osserviamo tuttavia che anche in questo caso vale la osservazione 20 del N. 21, e che quindi, nel caso in cui questi punti siano diversi dal punto h, risulta ben determinata una retta passante per h, retta che è funzione simmetrica dei vertici del simplesso e che potremo chiamare in ogni caso retta di Eulero relativa al simplesso $\mathcal{S}$.

26 - Sia dato il sistema di n (n + 1)/2 equazioni (3)-25, che qui riscriveremo per comodità del lettore:

$$(1) \qquad F(x \mid a^{\alpha}) = F(x \mid a^{\alpha}) \qquad \alpha, \beta \in \mathcal{A}.$$

Abbiamo già ripetutamente osservato che le equazioni (1) indipendenti sono in numero di n; sceglieremo per la discussione le seguenti:

$$(2) \qquad F(x \mid a^{\alpha}) = F(x \mid a^{n+1}) \qquad (1 \leq \alpha \leq n) .$$

Costruiamo ora la matrice K ad n + 1 righe ed ad n colonne i cui elementi sono:

$$(3) \qquad K_i^{\alpha} = a_i^{\alpha} - a_{n+1}^{\alpha} \qquad (0 \leq i \leq n \quad ; \quad 1 \leq \alpha \leq n) .$$

Per noti teoremi di algebra, le soluzioni del sistema (2) sono proporzionali agli n + 1 determinanti, presi con segni alterni, delle matrici quadrate che si ottengono dalla K sopprimendo una delle righe.

Indichiamo con K_0 la matrice quadrata che si ottiene dalla K sopprimendo la riga di indice i = 0. La condizione che sia soddisfatta la relazione (3)-23 per la soluzione del sistema (1) si traduce in questo caso con la relazione:

(4) $(R^2 + 1)\,[\mathrm{Det}\,(K_C)]^2 > \mathrm{Det}\,(K_\tau\, K)$.

27 - Nel caso che stiamo trattando, la determinazione del simplesso di E* che possa essere detto regolare, secondo la denominazione qui adottata, può essere fatta come esporremo qui di seguito.

Rappresentiamo l'insieme E* dello spazio proiettivo E ponendo:

(1) $x_C = 1$,

ed interpretando i parametri:

(2) $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$

come coordinate cartesiane di punto in uno spazio euclideo ad n dimensioni; allora i punti dell'insieme E* sono rappresentati dagli elementi dell'insieme (che indicheremo ancora con E*) dei punti interni all'ipersfera avente centro nell'origine e raggio R. Poiché tale ipersfera ha equazione:

(3) $R^2 - \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 = 0$

i punti di E* hanno coordinate soddisfacenti alla relazione:

(4) $R^2 - \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 > 0$.

Consideriamo ora gli n + 1 punti dello spazio euclideo

(5) $k\, a_i^\alpha \qquad (\alpha \in \mathcal{A} \quad , \quad 0 \leq i \leq n)$

essendo i numeri a_i^α dati dalle formule del N. 12, ed essendo la costante k scelta con la condizione aggiuntiva, tratta dalla (2)-12,

(6) $k^2\, 2n / (n + 1) < R^2$.

Si verifica senza difficoltà che i punti (5) forniscono i vertici di un simplesso regolare di E*. Ovviamente ogni altro simplesso regolare si ottiene da questo (che ha il baricentro nel centro dell'ipersfera (3)) mediante una isometria dell'insieme E*.

NOTA BIBLIOGRAFICA

La bibliografia relativa alle proprietà dei simplessi negli spazi a due e tre dimensioni è ben conosciuta e del tutto elementare. Ci limitiano quindi a brevi e sommarie indicazioni su aspetti particolari di ciò che abbiamo esposto.

[1] Biggiogero G., *La geometria del tetraedro.* Enciclopedia delle matematiche elementari. Vol. II. Parte I. Art. XXV. Milano, 1937.
[2] Fano G., *Geometria non euclidea.* Bologna, 1935.
[3] Manara C. F., *Vedute sulla geometria del triangolo.* Periodico di matematiche. Serie IV. Vol. 22. 1942.
[4] Manara C. F., *La simmetria.* Periodico di matematiche. Serie IV. Vol. 45, 1967.
[5] Retali V. e Biggiogero G., *La geometria del triangolo.* Enciclopedia delle matematiche elementari. Vol. II. Parte I. Art. XXIV. Milano, 1937.

Finito di stampare nel mese di Gennaio 1993
presso il Poligrafico Mucchi di Modena